УДК 514.1 *1.2.2*

МОЖНО ЛИ ПОСТРОИТЬ ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ С НЕЧЕТНЫМИ СТОРОНАМИ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ БЕЗ ДЕЛЕНИЙ?

Р.Р. Нигматуллин

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева-КАИ
Российская Федерация, 420111, Казань, ул. К. Маркса, 10

Аннотация. В этой краткой статье рассматриваются новые возможности построения правильных многоугольников с числом сторон, равным нечетным числам как 3,5,7,9,... Предлагаемый метод (понятный любому продвинутому школьнику старших классов), позволяет решить такую достойную внимания проблему как трисекция угла, деление отрезка на части, выражаемые нечетными числами, с помощью линейки *без* делений, циркуля, позволяющего делать засечки, и обыкновенного грифельного карандаша. Оказывается, что обыкновенный карандаш с толщиной грифеля полмиллиметра также играет важную роль в решении этой проблемы.

Ключевые слова: Правильные многоугольники с нечетным числом сторон, проблема трисекции произвольного угла, циркуль с засечками, линейка без делений.

Введение

Вопрос, поставленный в заголовке статьи, носит оттенок олимпиадной задачи для продвинутых школьников старших классов, но тем не менее ряд таких якобы *тривиальных* задач имеет непреходящее значение и представляет интерес для широкого круга математиков. Поэтому имеет смысл рассмотреть их более внимательно. Эти геометрические задачи интересовали автора ещё со школы, но тогда не было достаточно времени, чтобы рассмотреть их более детально и предложить изящное решение, удовлетворяющее требованиям жюри и потенциальных рецензентов.

Чтобы подойти к решению задачи, предварительно решим задачу деления отрезка на равные *нечетные* доли с помощью циркуля, имеющего острый наконечник и заточенный грифель, толщиной полмиллиметра, и линейки без делений (далее мы будем понимать эти два инструмента только в этом смысле).

1. Изложение 2-х методов

Совершенно очевидно, что произвольный отрезок заданной длины с помощью вышеуказанных инструментов можно разделить только на 2^{-q} (q=1,2,…) частей. Решение поставленной задачи будет основано на следующей паре очевидных соотношений, известных ещё школьнику старших классов:

$$\begin{aligned} S_N\left(x\right) &= x\left(1+x+x^2+\ldots+x^{N-1}\right)=\frac{x}{1-x}\left(1-x^N\right),\\ S_N\left(-x\right) &= x\left(1-x+x^2+\ldots+\left(-1\right)^{N-1}x^{N-1}\right)=\frac{x}{1+x}\left(1+\left(-1\right)^{N+1}x^N\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Кроме этой пары (1) нам понадобится соотношение, которое основано на следующем очевидном утверждении. Если взять тройку соседних чисел: $n-1$, n, $n+1$, то оказывается, что натуральное число n, расположенное посередине представляет собой среднее арифметическое от чисел, расположенных справа и слева от этого числа. Может быть, такое соотношение справедливо (хотя бы приближенно) для произвольных степеней чисел, расположенных справа и слева? Математически, такое утверждение может быть записано в виде:

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}+\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\right), \tag{2}$$

где n= 2,3,4,… Заметим, что при α = –1, 0, это соотношение *точное*, в остальных случаях оно является приближенным. Определим величину ошибки, используя биномиальные разложения:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} &\cong 1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^{2}}+O\left(\frac{1}{n^{4}}\right),\\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} &\cong 1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^{2}}+O\left(\frac{1}{n^{4}}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Учитывая соотношения (3) и подставляя их в (2), приближенно получим:

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \cong \frac{1}{n^{\alpha}}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^{2+\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{4+\alpha}}\right). \tag{4}$$

Соотношения (1) и (4) играют ключевую роль в решении поставленной проблемы.
Заметим также, что соотношение (2) приближенно охватывает случай гармонического среднего (α=1) и, независимо от приближенного равенства (2), случай геометрического среднего тоже

$$n=\sqrt{(n-1)(n+1)} \cong n\left(1-\frac{1}{2n^{2}}+O\left(\frac{1}{n^{4}}\right)\right). \tag{5}$$

Подставим теперь в (1) x=1/4. Тогда получим:

$$S_{N}\left(\frac{1}{4}\right) \cong \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{N}\right). \tag{6}$$

Как определить величину N, имея грифель толщиной 0.5 mm? Пусть ошибка составляет 1/10 от этой величины. Тогда целая величина N находится приближенно из соотношения 4^{N}=20. Откуда приближенно имеем, что N=2.161 ≈2. Следовательно, отрезок шириной 1/3 можно приближенно заменить соотношением

$$\frac{1}{3} \cong \frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{15+1}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{15}\right) \cong \frac{1}{3}-\frac{1}{45}. \tag{7}$$

Поправка, выраженная дробью 1/45 составляет величину ошибки 2%. Сложение отрезков дает требуемое разделение на три равные части с ошибкой примерно 0.67 (%), приходящейся на каждый отрезок. Если соотношение (1) умножить на некоторый угол φ, то это разделение легко перенести на проблему трисекции угла.

Точному решению этой проблемы посвящены работы серьёзных математиков [1-3]. Известна тривиальная задача о делении угла на две равные части и вообще на 2^{-q} (q=1,2,…) равных частей. Поэтому сложение углов [φ/4+φ/16]≈φ/3 с точностью (2/3) %, приходящейся на каждый угол легко решает древнюю проблему трисекции угла!

Интересно сопоставить с этим решением результат, получаемый из равенства (4). Положим в нем α=1 и n=3. Тогда получим

$$\frac{1}{3} \cong \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{9-1} \cong \frac{1}{3}+\frac{1}{27}. \tag{8}$$

Если в выражении (8) отбросить последнее слагаемое, то мы получим ошибку равную примерно 3.7 %. Следовательно, деля эту ошибку на 3, получим, что сложение двух отрезков, имеющих 1/4 и 1/8 от исходной длины приводит к делению исходного отрезка на три части с ошибкой 1.2%. Такая малая ошибка вполне приемлема для практических расчетов с грифелем 0.5 mm, используемым для проведения тонких линий, хотя первый метод дает ошибку меньше одного процента. Понятно, что от деления отрезка нетрудно перейти к делению угла и пара углов [φ/4+φ/8]≈φ/3 решает почтенную проблему трисекции произвольного угла с точностью 1.2%. Становится понятным как обобщить этот результат для деления исходного отрезка единичной длины на нечетные отрезки, удовлетворяющие соотношению:

$$\begin{gathered}\frac{1-2^{-Nq}}{2^q-1} \cong \frac{1}{2^q}\left(1+\frac{1}{2^q}+\frac{1}{4^q}+\frac{1}{8^q}+\ldots\right),\\ \frac{1+(-1)^{N+1}2^{-Nq}}{2^q+1} \cong \frac{1}{2^q}\left(1-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{4^q}-\frac{1}{8^q}+\ldots\right)\end{gathered} \tag{9}$$

Таблица 1.

Какие отрезки и углы, содержащие нечетное число частей, можно построить из отрезков 2^{-q} (q=1,2,…) и биссектрис, делящих заданный угол φ на те же части $\varphi/2^q$?

Значение q x=2^{-q}	$\frac{1}{2^q-1}$	$\frac{1}{2^q+1}$	Величина полной ошибки $Err(q,N) \cong \frac{100\%}{2^{q(N+1)}}$
q=2 x=1/4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	Err(2,2)=1.7%
q=3 x=1/8	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	Err(3,2)=0.2%
q=4 x=1/16	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{17}$	Err(4.2)=0.02%

Как следует из таблицы 1 с увеличением q точность $Err(q,N)$ резко возрастает и задача решается практически точно.

Интересно сравнить эти результаты с соотношением (2), которое имеет боле общий характер деления отрезка на n равных частей, при условии, что деления на $n \pm 1$ частей, предполагаются известными. Полагая в (2) α=1, получим:

$$\frac{1}{n} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n^2-1} \cong \frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^5}\right). \tag{10}$$

Результаты анализа выражения (10) сведены в таблицу 2.

Таблица 2.
Какие отрезки и углы, содержащие нечетное число частей, можно построить из отрезков $1/n$ и биссектрис, делящих заданный угол φ на ту же величину n, опираясь на выражение (10)?

Значение n	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n+1}$	Величина полной ошибки $Err(n) \cong \frac{100\%}{n^3}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$Err(3)$=3.7%
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6^*}$	$Err(5)$= 0.8%
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$Err(7)$=0.3%
9	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10^*}$	$Err(9)$=0.14%
15	$\frac{1}{14^*}$	$\frac{1}{16}$	$Err(15)$=0.03%
17	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{18^*}$	$Err(17)$=0.02%

Замечания к таблице 2. Цифры, отмеченный звездочкой, используют предыдущие деления. Например, деление отрезка на 6 частей предполагает предварительное деление отрезка на 3 части, а затем полученную треть получившегося отрезка необходимо поделить пополам. Также можно получить деление отрезка на 10,14,18 частей, предварительно поделив каждый из них на 5,7,9 частей, соответственно. Ошибка при втором методе также резко уменьшается с ростом n, но её уменьшение *степенное* по сравнению с *экспоненциальным* уменьшением, приведенном в первом методе. Но достоинство второго подхода состоит в том, что он может поделить отрезок на *произвольную* заданную величину n, чего невозможно добиться в первом методе.

Теперь становится понятным как решить проблему с правильными многоугольниками, содержащими нечетное число сторон.

Опираясь на формулы (9), (10) приведем соответствующие приближенные формулы, позволяющие решить эту проблему двумя методами. Результаты полезно привести в виде нижеприведенной таблицы.

Таблица 3.
Расчеты по формулам (9) и (10) для сторон правильных многоугольников

q, $\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi}{2^q \pm 1}$	$\frac{2\pi}{n} \cong 2\pi\left(\frac{1}{2^q} \pm \frac{1}{4^q} + \frac{1}{8^q}\right)$ $\frac{2\pi}{n} = 2\pi\left(\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2(n+1)}\right)$	Ошибка в градусах, приходящаяся на одну сторону многоугольника	Комментарии
q=2, $M=\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3} \cong 2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right) \cong \frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{63}\right)$ $\frac{2\pi}{3} \cong 2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) \cong \frac{2\pi}{3}\left(1+\frac{1}{9}\right)$	Er=0.63° Er=4.44°	Первый метод дает лучший результат с меньшей ошибкой во всех случаях.
q=2, $M=\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5} \cong 2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right) \cong \frac{2\pi}{5}\left(1-\frac{1}{65}\right)$ $\frac{2\pi}{5} \cong 2\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12^*}\right) \cong \frac{2\pi}{5}\left(1+\frac{1}{25}\right)$	Er=0.22° Er=0.58°	Деление, отмеченное звездочкой (*) предполагает использование рекуррентной процедуры
q=3, $M=\frac{2\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{7} \cong 2\pi\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{512}\right) \cong \frac{2\pi}{7}\left(1-\frac{1}{511}\right)$ $\frac{2\pi}{7} \cong 2\pi\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{16^*}\right) \cong \frac{2\pi}{7}\left(1+\frac{1}{49}\right)$	Er=0.01° Er=0.15°	Деление, отмеченное звездочкой (*) предполагает использование рекуррентной процедуры
q=3, $M=\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9} \cong 2\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{64}+\frac{1}{512}\right) \cong \frac{2\pi}{9}\left(1+\frac{1}{512}\right)$ $\frac{2\pi}{9} \cong 2\pi\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{20^*}\right) \cong \frac{2\pi}{9}\left(1+\frac{1}{81}\right)$	Er=0.008° Er=0.05°	Деление, отмеченное звездочкой (*) предполагает использование рекуррентной процедуры

Замечание к таблице 3. Несмотря на то, что первый метод дает результат с меньшей ошибкой, он *не* является универсальным. Второй метод *универсальный* и применим к построению правильного многоугольника с произвольным числом нечетных сторон *n*. Например, 11-ти или 13-ти сторонние многоугольники можно будет построить только с использованием второго метода.

2. Краткие выводы

Думаю, что любой заинтересованный читатель (автор относит к их числу также школьника старших классов и школьного учителя математики тоже), прочитавший эту краткую статью, увидит интересные связи между задачей, дошедшей до нас из глубины веков и современностью. Что может извлечь для себя современный читатель, прочитавший эту статью? Важная рекомендация автора (РРН): обращайте внимание на *постановку* *задачи*. Если эти задачи решать точно, то деление отрезка на нечетное число частей и задача трисекции угла *точно* не решаются или решаются (см. работы [1-2]) с помощью довольно изощренных математических методов. А стоит чуть "отпустить" это требование, то эти задачи становятся уже решаемыми довольно простыми методами. Справедливости ради стоит отметить работу математика П.Л. Вантцеля (P.L.Wantzel) (1837), где он показал, что проблема трисекции угла сводится к отысканию действительного корня кубического уравнения x^3-3x-1=0, который неприводим и не находится точно. Читатель имеет право задать автору такой провокационный вопрос: неужели за столько лет никто не смог решить проблему трисекции угла точно? Автор этой статьи, не претендуя на полноту поиска нашел только две недавние публикации [1-2], где квалифицированные математики в своих статьях предлагают весьма нетривиальные решения проблемы трисекции угла и анализирует работы других авторов, опубликованных ранее.

Отталкиваясь от решения этой "школьной" геометрической задачи, реализованной с помощью пары примитивных инструментов, можно поставить более общие задачи. Например, можно ли с помощью циркуля и линейки построить приближенно такую величину как ln(2)? Ответ будет утвердительным, если принять во внимание соотношение:

$$\ln(2) \cong \sum_{n=1}^{N} \left(-1\right)^{n-1} \frac{1}{n}. \tag{11}$$

Но попытка обобщить это соотношение на произвольную переменную x, связанную с рассмотрением функции $f(x)$ и представленную рядом Тейлора, связана с проблемой геометрического построения на плоскости величины $c_n x^n$, а решение этой задачи с помощью циркуля и линейки автору этой заметки неизвестно. Для заинтересованного читателя можно предложить также задачу о построении отрезка, выражаемого суммой

$$S\left(N\right) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n}, \tag{12}$$

с помощью циркуля и линейки. Но попытка обобщить это соотношение на произвольную степень становится уже нерешаемой проблемой для автора. Интересный вопрос можно поставить также для инженеров и математиков-прикладников: для каких прикладных задач эти математические выкладки могут быть востребованы? Добавим только, что по аналогии с отрезками и углами, можно разделить фиксированную полосу частотного спектра на нечетное число частей или жидкость/сыпучее тело на нечетные объёмы тоже, используя для этих целей уже свои "циркули" и "линейки" без делений. Хотя, вероятнее всего, Мать-Природа уже решает эту проблему деления больших линейных молекул на генном уровне.

Благодарности. *Автор выражает глубокую благодарность проф. Морозову О.Г. и анонимному Рецензенту за интерес и замечания, проявленные ими к этой проблеме.*

Литература

1. Rediske A.C., The Trisection of an Arbitrary Angle: A classical geometric solution. J. of Advances in Mathematics (2019) pp. 7640-7669. DOI: 10.24297/jam.v.14i2.7402.
2. Kimuya M. Alex, Josephine Mutembei. The Angle Trisection Solution (A Compass-Straightedge (Ruler) Construction). J. of Advances in Mathematics (2016). pp. 7308-7330, https// cirworld.com.

IS IT POSSIBLE TO CONSTRUCT REGULAR POLYGONS WITH ODD SIDES USING A COMPASS AND A RULER WITHOUT DIVISIONS?

R.R. Nigmatullin

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI
10, K. Marx St., Kazan, 420111, Russian Federation

Abstract. This brief article deals with new possibilities of constructing regular polygons with the number of sides expressed by odd numbers like 3,5,7,9,... The method proposed in the article (understandable to any advanced high school student) allows to solve such a venerable problem as *trisection of an angle*, division of a segment into parts expressed by odd numbers, with the help of a ruler without divisions and a circular, allowing to make serifs, and an ordinary lead pencil. It turns out that an ordinary pencil with a lead thickness of half a millimeter also plays an important role in solving this problem.

Keywords: Regular polygons with an odd number of sides, problem of trisection of an arbitrary angle, compass with notches, ruler without divisions.

Статья представлена в редакцию 01 августа 2024г