УДК 621.3712 *05.12.07*

РАСЧЕТ УСТРОЙСТВ СВЧ- И КВЧ-ДИАПАЗОНОВ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

С.А. Капустин, А.С. Раевский, С.Б. Раевский

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Российская Федерация, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24

Аннотация. Рассмотрены варианты использования интегральных представлений электромагнитных полей в краевых задачах прикладной электродинамики, связанных с расчетом СВЧ- и КВЧ-устройств. Показана возможность совершенствования методов решения несамосопряженных краевых задач, к которым, как правило, сводится электродинамический расчет подавляющего большинства функциональных узлов СВЧ. Акцент сделан на переходе от краевых задач к интегральным уравнениям; анализе самосогласованных задач, приводящих к интегральным уравнениям; применении метода интегродифференциальных уравнений и решении самосогласованных задач о комплексном резонансе на основе интегрального представления леммы Лоренца.

Ключевые слова: интегральные представления, комплексные волны, комплексный резонанс, самосогласованная задача, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения.

Введение

Интегральные представления в краевых задачах прикладной электродинамики включают в себя фундаментальные интегральные соотношения типа леммы Лоренца и закона сохранения энергии, функциональные связи между краевыми задачами на дифференциальных уравнениях с интегральными уравнениями, соотношения ортогональности собственных функций однородных краевых задач, представления полей в форме непрерывного спектра собственных функций, интегральные функциональные соотношения типа формулы Грина, математическую интерпретацию задач излучения, использующих принцип Гюйгенса – Френеля и т.д.

Интегральные представления используются для контроля получаемых результатов (это особенно важно при формулировке краевых задач в незамкнутой форме); в ряде случаев (по крайней мере, в асимптотике) позволяют получать аналитические решения; приводят к самосогласованным задачам, учитывающим обратное влияние поля излучения на первичные источники; позволяют получать априорную информацию о спектре возможных решений; решать присоединенные задачи как специфические задачи о возбуждении и т.д. [1-5].

Все это предопределяет значительный интерес к различным видам интегральных представлений в прикладной электродинамике.

1. Переход от краевых задач к интегральным уравнениям

Рассмотрим цилиндрическую направляющую структуру, обобщенный вид поперечного сечения которой представлен на рис. 1.

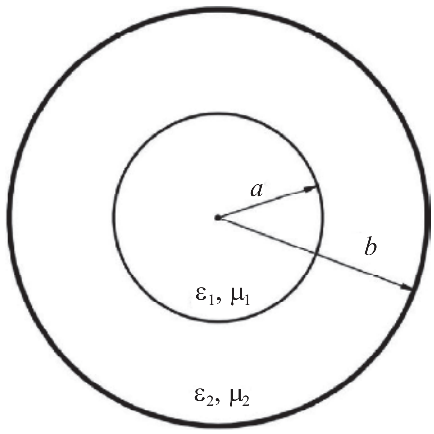


Рис. 1. Обобщенное поперечное сечение цилиндрической структуры

Структура может быть многослойной или однослойной ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$), экранированной (при $r = b$ находится металлический экран) или открытой, заполнение может быть диэлектрическим ($\varepsilon_{1,2} \neq 1$) или ферромагнитным ($\mu_{1,2} \neq 1$).

Поля в однородных и кусочно-однородных направляющих структурах описываются краевыми задачами на однородном уравнении Гельмгольца. В цилиндрической системе координат относительно векторов Герца это уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_z^{e,m}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial z^2} + \varepsilon\mu\omega^2 \Pi_z^{e,m} = 0 .$$

Разделение переменных приводит к уравнению:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\alpha^2 + \frac{1/4 - n^2}{r^2}\right) u = 0 ,$$

которое записано для функции u, описывающей радиальную зависимость полей волн цилиндрической структуры.

Граничные условия для полей волн экранированных направляющих структур с идеально проводящими поверхностями или открытых структур, поля которых удовлетворяют нулевому граничному условию на бесконечности, являются однородными. Если экранирующая поверхность импедансная или в спектре открытой структуры рассматриваются несобственные волны, то граничные условия становятся неоднородными. Такая задача на однородном уравнении Гельмгольца с частично неоднородными граничными условиями называется полуоднородной. Ветви решений полуоднородной и однородной краевых задач на плоскостях волновых чисел могут быть связаны друг с другом в том случае, если они являются решениями интегрального уравнения Вольтерра, записываемого в виде:

$$u(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x) - \lambda \int_a^x K(x,\xi) u(\xi) d\xi . \qquad (1)$$

Решая уравнение (1) методом последовательных приближений, можно получить волновые числа, соответствующие и однородной краевой задаче, и полуоднородной для различных цилиндрических направляющих структур: круглых волноводов, однородно заполненных взаимной и невзаимной средой; с продольно-намагниченным ферритовым стержнем; открытых диэлектрических, продольно намагниченных ферритовых волноводов.

Кроме непосредственного нахождения волновых чисел, интегральное представление краевой задачи, т.е. переход от последней к интегральному уравнению, позволяет на основе асимптотических решений получить априорную информацию о спектре волн направляющей структуры, тем самым определить предмет поиска при решении дисперсионных уравнений.

В качестве примера рассмотрим задачу о расчете полного спектра волн открытого диэлектрического волновода (ОДВ). Функции, описывающие радиальную зависимость поля волн ОДВ, удовлетворяют уравнению Бесселя. В исследовании [1] показано, что краевая задача на этом уравнении при условии ограниченности поля по радиальной координате в общем случае в области $r > a_\delta$ имеет решение $u(\alpha, r)$, удовлетворяющее интегральному уравнению:

$$u(\alpha, r) = e^{-i\alpha r} - \int_r^\infty \frac{\sin\alpha(r - r')}{\alpha} p(r') u(\alpha, r') dr'. \tag{2}$$

Здесь a_δ – значение r, соответствующее наперед заданному $\delta \geq 0$, для которого решения уравнения (2) при $r \to \infty$ имеют асимптотическую запись

$$u(\alpha, r) = e^{-i\alpha r} \tag{3}$$

в областях волнового числа α:

• первая область

$$\operatorname{Im}\alpha \geq 0;\ |\alpha| \geq \delta;$$

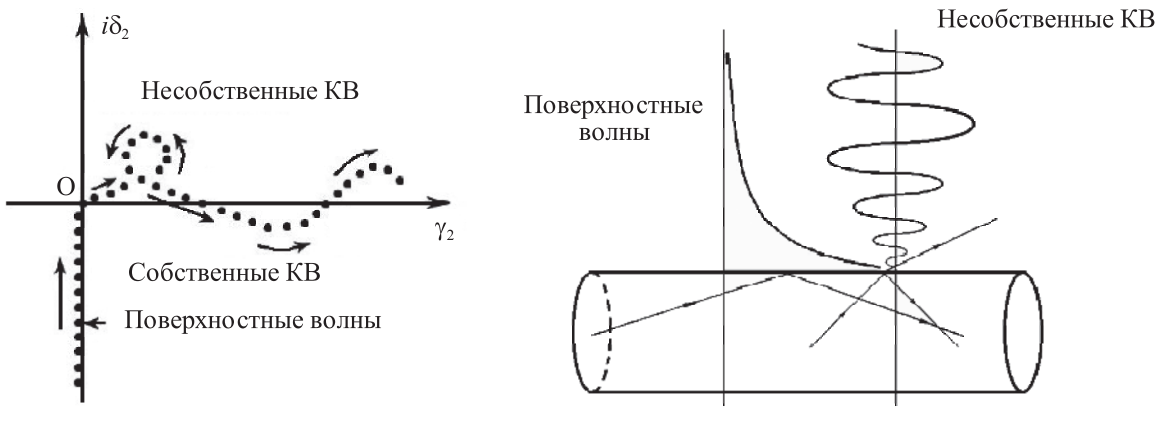
• вторая область

$$\operatorname{Im}\alpha \leq 0;\ \alpha \neq 0;\ \sigma(r)/|\alpha| < 1, \tag{4}$$

откуда следует, что на критических частотах поверхностные волны могут переходить только в несобственные комплексные волны (КВ) – волны, имеющие в отсутствии диссипации энергии комплексные волновые числа. Собственные КВ могут существовать в областях частот, удаленных от критических частот поверхностных волн.

Расположение корней дисперсионного уравнения в плоскости поперечного сечения волнового числа α_2 внешней области (вне ОДВ), соответствующее выражению (2), приведено на рис. 2, *а*. Зависимость от радиальной координаты полей поверхностных и несобственных КВ и особенности их распространения иллюстрирует рис. 2, *б* .

Разрез на комплексной плоскости $\alpha_2 = \gamma_2 + i\delta_2$, которому соответствует $\beta_2 = 0$ ($\beta = \beta_1 + i\beta_2$ – продольное волновое число), проходит по отрицательной мнимой полуоси ($\delta_2 < 0$) и частично по действительной полуоси $\gamma_2 > 0$, разделяя два листа римановой поверхности комплексной функции β. Решения дисперсионного уравнения (рис. 2, *а*) находятся на верхнем листе римановой поверхности, которому условно соответствует $\beta_2 < 0$. Стрелки на рисунке указывают движение корней при уменьшении частоты.



а *б*

Рис. 2. Корни дисперсионного уравнения волн круглого открытого ДВ в плоскости волнового числа α_2

В точке O, в соответствии с выражением (4), поверхностные волны переходят в быстрые несобственные волны (вытекающие). Их поля, в соответствии с уравнением (3), нарастают по радиальной координате. В точке *A* вытекающие волны переходят в собственные комплексные волны, поля которых удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда. В точке *B* собственные комплексные волны вновь переходят в вытекающие, которые затем (при уменьшении частоты) переходят в медленные несобственные волны. Таким образом, интервал *AB*, предсказанный на основе решения (3) интегрального уравнения и областей его существования, полностью соответствует получаемому из дисперсионного уравнения краевой задачи.

Рассмотренный пример наглядно интерпретирует возможность априорного исследования спектров волн направляющих структур на основе сопоставления краевых задач и интегральных уравнений Вольтерра с использованием их асимптотических решений.

Интегральные представления находят применение во внутренних задачах электродинамики. Широко используемыми методами расчета электродинамических структур являются метод частичных областей (МЧО) и различные импедансные методы [6]. При решении внутренних задач электродинамики, как правило, для представления полей в частичных областях используют дискретные спектры собственных функций этих областей. Однако это корректно только в тех случаях, когда для выделенных областей можно сформулировать краевые задачи Штурма – Лиувилля [7]. Если среди частичных областей, на которые разбивается электродинамическая структура, имеются такие, для которых нельзя поставить указанную краевую задачу Штурма – Лиувилля, нужно вводить непрерывный спектр собственных функций, т.е. представлять поле в виде интегралов по волновым числам. Впервые использование непрерывного спектра было применено, по-видимому, при расчете параметров прямоугольных коаксиалов [8].

На рис. 3 приведено поперечное сечение прямоугольного коаксиала,разбиение которого на частичные области приводит не к краевым задачам Штурма – Лиувилля, а к краевым задачам со свободной границей, что не дает возможности сформулировать для них однородные краевые задачи с дискретными спектрами собственных функций.

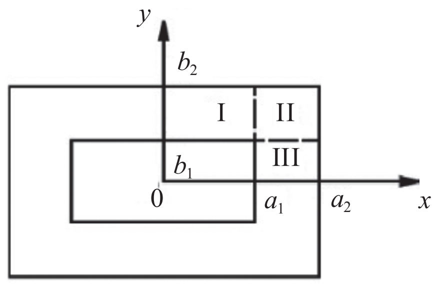


Рис. 3. Поперечное сечение прямоугольного коаксиала

Области же хотя бы с одной свободной границей требуют введения непрерывного спектра, т.е. интегрального представления поля, которое должно приводить к интегральным уравнениям (системам уравнений) относительно спектральных амплитуд. Только интегральное представление поля позволит корректно сформулировать краевые задачи.

2. Самосогласованные задачи, приводящие к интегральным уравнениям

Основным признаком самосогласованной задачи является ее замкнутость, при которой первичные источники корректируются обратным воздействием на них вторичных источников. Такая задача формулируется либо на дифференциальном, либо на интегральном уравнении (системе уравнений, в общем случае интегродифференциальных) и является задачей на собственные функции и собственные значения. Например, при расчете поля апертурных антенн самосогласованная задача сводится к системе интегродифференциальных уравнений относительно компонент полей на излучающей апертуре (рис. 4):

$$\begin{cases} \vec{E}_\tau = \dfrac{1}{4\pi}\left[-i\omega\mu\displaystyle\int_{S_0}\vec{H}_\tau\dfrac{e^{-ik\vec{r}}}{r}dS + rot\left(\displaystyle\int_{S_0}\vec{E}_\tau\dfrac{e^{-ik\vec{r}}}{r}dS\right), \vec{z}_0\right]; \\ \vec{H}_\tau = \dfrac{1}{4\pi}\left[i\omega\varepsilon\displaystyle\int_{S_0}\vec{E}_\tau\dfrac{e^{-ik\vec{r}}}{r}dS + rot\left(\displaystyle\int_{S_0}\vec{H}_\tau\dfrac{e^{-ik\vec{r}}}{r}dS\right), \vec{z}_0\right]. \end{cases}$$

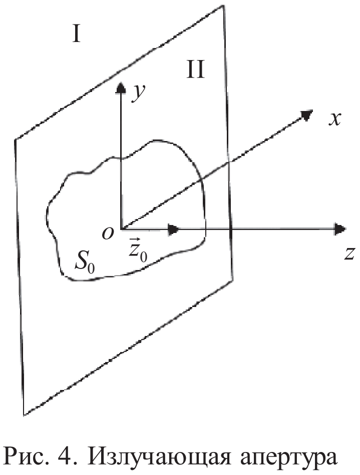


Рис. 4. Излучающая апертура

3. Метод интегродифференциальных уравнений на основе интегрального представления леммы Лоренца

Интегральное представление леммы Лоренца является фундаментальным соотношением, позволяющим в чисто физической трактовке составлять интегральные уравнения (системы уравнений) относительно распределения полей на поверхности направляющей структуры, формулировать задачи о возбуждении, записывать условия ортогональности в задачах дифракции.

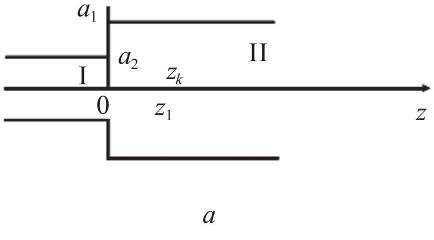
Интегральная запись

$$\oint_S \left\{\left[\vec{E}_1,\vec{H}_2\right]-\left[\vec{E}_2,\vec{H}_1\right]\right\}d\vec{S}=\int_V\left(\vec{j}_1^{\,e}\vec{E}_2-\vec{j}_2^{\,e}\vec{E}_1-\vec{j}_1^{\,m}\vec{H}_2+\vec{j}_2^{\,m}\vec{H}_1\right)dV$$

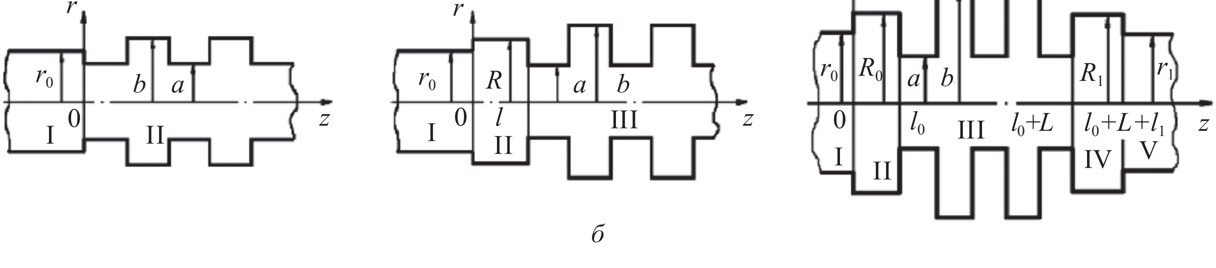
леммы Лоренца связывает системы токов $\vec{j}_1^{\,e}$, $\vec{j}_1^{\,m}$, $\vec{j}_2^{\,e}$, $\vec{j}_2^{\,m}$ с полями $\vec{E}_1,\vec{H}_1$ и $\vec{E}_2,\vec{H}_2$, соответственно, внутри отрезка направляющей структуры, ограниченного боковыми поверхностями S_1, S_2 так, что $S = S_0 + S_1 + S_2$. Объем V ограничен поверхностью S.

В случае однородных краевых задач интегральное представление леммы Лоренца приводит к записи условий ортогональности полей собственных волн (колебаний), позволяющей решать задачи о возбуждении и задачи дифракции. Таким образом, целый ряд фундаментальных интегральных представлений является следствием интегральной записи леммы Лоренца.

Метод интегродифференциальных уравнений на основе интегрального представления леммы Лоренца является универсальным, пригодным для расчета как неограниченных продольно-нерегулярных экранированных направляющих структур, так и отдельных нерегулярных (плавных и скачкообразных) участков волноводного тракта, в том числе и неоднородно заполненных. Например, могут быть рассчитаны параметры переходов с волноводов одного сечения на волноводы другого сечения (рис. 5, *а*), а также соединения круглых волноводов с гофрированными, в том числе с применением различных трансформирующих ячеек (рис. 5, *б*).



а



б

Рис. 5. Соединения различных волноводов

4. Самосогласованная задача о комплексном резонансе на основе интегрального представления леммы Лоренца

Интегральные представления оказываются полезными для уточнения особенностей некоторых физических явлений, возникающих в электродинамических структурах.

В поперечно-неоднородных (слоистых) направляющих структурах, описываемых несамосопряженными электродинамическими операторами, могут существовать, даже в отсутствии диссипации энергии, волны с комплексными волновыми числами – комплексные волны [9]. Источники, описываемые действительными функциями координат, возбуждают, в частности, в двухслойном круглом экранированном волноводе (рис. 6) по обе стороны от себя пары комплексно-сопряженных волн с противоположно направленными фазовыми скоростями. Это приводит к возникновению стоячей волны, поле которой локализовано вблизи источника. Поскольку отмеченное явление обнаруживает резонансные свойства не на одной частоте, как при обычном резонансе, а во всем диапазоне существования КВ, оно классифицировано как комплексный резонанс (КР).

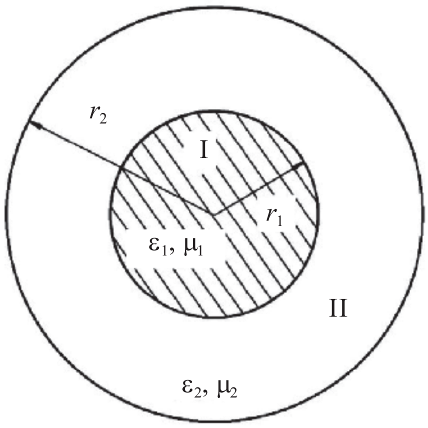


Рис. 6. Поперечное сечение двухслойного круглого экранированного волновода

Поскольку комплексный резонанс возникает в результате взаимодействия двух комплексных волн, приводящих к образованию специфического (локализованного вблизи источника) поля стоячей волны (рис. 7), первостепенным является вопрос ортогональности этих волн. Решение его позволит определить пары комплексных волн, образующих указанное поле стоячей волны, и выяснить условия возникновения комплексного резонанса. Кроме того, поскольку в реальных условиях комплексный резонанс наблюдается в ограниченных по длине отрезках направляющих структур, необходимо выяснить вопрос о взаимодействии комплексных волн, приводящих к возникновению взаимных потоков мощности, нарушающих условия существования комплексного резонанса.

Для рассмотрения поднятых вопросов используется интегральная запись леммы Лоренца. В ограниченных по продольной оси отрезках слоистых направляющих структур взаимодействие комплексной волны, возбуждаемой источником, с комплексной волной, возникающей за счет отражения от конца отрезка волновода, может нарушить режим стоячей волны, образующей комплексный резонанс.

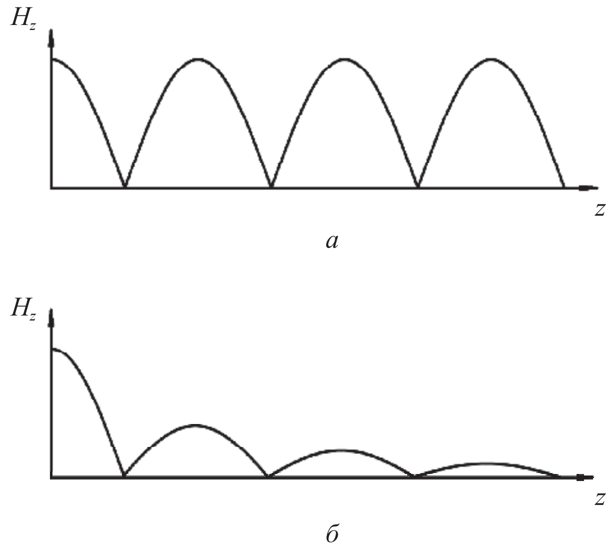


Рис. 7. Зависимость поля стоячей волны от продольной координаты в случае резонанса: *а* – обычного; *б* – комплексного

В реальной ситуации комплексный резонанс не проявляет идеальных свойств, соответствующих бесконечной по продольной оси направляющей структуре. В частности, полоса частот, соответствующая комплексному резонансу, сужается по сравнению с полосой существования комплексных волн. В верхнем участке диапазона сужение происходит из-за возбуждения КВ на концах отрезка волновода, в нижнем – из-за уменьшения (вследствие большого затухания) запасенной в объеме энергии.

Рассмотрение задачи, описывающей КР с использованием интегральных представлений, позволяет утверждать, что это явление требует обязательного присутствия источника, через который замыкаются прямой и обратный потоки мощности: их совместное существование и обеспечивает возникновение резонансного явления.

Заключение

Таким образом, использование интегральных представлений электромагнитных полей в краевых задачах прикладной электродинамики, связанных с расчетом СВЧ- и КВЧ-устройств, способствует совершенствованию методов решения несамосопряженных краевых задач, к которым, как правило, сводится электродинамический расчет подавляющего большинства функциональных узлов СВЧ. Указанные представления можно разделить на две большие категории:

1) естественно существующие и интерпретирующие физические законы, например, лемма Лоренца и теорема взаимности;

2) получаемые искусственно, например, переходом от краевых задач на дифференциальных уравнениях к интегральным уравнениям; введением непрерывных спектров собственных функций частичных областей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раевский, А.С.* Электродинамика направляющих и резонансных структур, описываемых несамосопряженными краевыми задачами: специальность 01.04.03: автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Нижегородский государственный технический университет. – Самара, 2004. – 32 с.

2. *Вайнштейн, Л.А.* Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988.

3. *Каценеленбаум, Б.З.* Высокочастотная электродинамика / Б.З. Каценеленбаум. – М.: Наука, 1966.

4. *Неганов, В.А.*, *Лемжин, М.И.* Сингулярное обобщенное уравнение Халлена для электрического вибратора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2001. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 40-43.

5. *Наймарк, М.А.* Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969.

6. *Миттра, Р.* Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М.: Мир, 1974.

7. *Белов, Ю.Г.* Расчет критических частот и фазовой постоянной в эллиптическом волноводе с синусоидальной гофрой // Изв. вузов СССР. Сер. Радиоэлектроника. 1977. – Т. 20. – № 2. – С. 114-118.

8. *Каценеленбаум, Б.З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами / Б.З. Каценеленбаум. – М.: АН СССР, 1961. – С. 213.

9. *Веселов, Г.И.* Слоистые металлодиэлектрические волноводы / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский. – М.: Радио и связь, 1988.

CALCULATION OF MICROWAVE AND EHF RANGE DEVICES USING INTEGRAL REPRESENTATIONS

S.A. Kapustin, A.S. Raevskii, S.B. Raevskii

Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev
24,Minin St., Nizhny Novgorod, 603950, Russian Federation

Abstract. In the electrodynamic calculation of microwave (EHF) devices using methods that lead to an algorithm in an open form, strict integral relations (representations) are used: Lorentz's lemma, the reciprocity theorem, the condition of wave orthogonality, etc., with the help of which the control is carried out. The results obtained, their convergence improves, in some cases the calculation is impossible without representations. Integral representations are a record of electrical electrodynamics (in any unified form) and their solutions in one or another generalized form, connecting electromagnetic fields in electrodynamic structures described by boundary value problems.

Keywords: integral representations, complex waves, complex resonance, self-consistent problem, differential equations, integral equations.

Статья поступила в редакцию 07.05.2021